نتيجة: ليكن $f:A \longrightarrow A'$ تشاكل حيو رتي عامر
عندئذ:
$$f(J(A)) \subseteq J(A')$$
البرهان تمكين للحل وصورتـ مثالي قابل للحل

تعريف: ليكن $f:A \longrightarrow A'$ تشاكل حيو رتي عامر و B مثالي في A' اذا $f^{-1}(B)$ مثالي في A

1 الحل: $f^{-1}(B)$ جذر لو حيد في $A \supseteq$

$\forall a \in A$ و $d_a(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(B)$

ليكن $a \in A$ ، $y \in d_a(f^{-1}(B))$ يوجد $x \in f^{-1}(B)$ بحيث
$f_*x \in B$
$y = d_a(x)$
$f(y) = f(d_a(x)) = f([a,x]) = [f(a), f(x)]$
$\underset{\Delta}{\underbrace{\quad}}$

$= d(f_a) \in B \implies y \in f^{-1}(B)$

اذن $f^{-1}(B)$ مثالي في A

تمرين: ليكن A جبر لي فوق الحقل R ، I مثالي في A يحقق
$$[I,I] = I$$
أثبت أن المثالي I مميز في A

1 الحل:
-1 I مثالي في A
-2 ليكن d يحقق الاشتقاق [ليست إ.ص.رر s، أقل]
ولنثبت $d(I) \subseteq I$
$y \in d(I) \implies \exists x \in I ; y = dx$
فان $x \in I$ حيث $x = [a,b]$ $a,b \in I$
$$y = d[a,b] = [d(a),b] + [a,db]$$

$$= -d_b(d(a)) + d_a(d(b)) \quad d_{a}(b) - d_{b}(a) \in I$$

أي أن I مثالي في A.

لكن A حر لو قـدم متلف ع R $\longleftarrow$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$

أثبت أن .

$$\underbrace{[[[x_1,x_2],x_3],x_4]}_{\boxed{1}} + \underbrace{[[[x_2,x_1],x_4],x_3]}_{\boxed{2}}$$

$$+ \underbrace{[[[x_3,x_4],x_1],x_2]}_{\boxed{3}} + \underbrace{[[[x_4,x_3],x_2],x_1]}_{\boxed{4}} = 0$$

الحل:

$\boxed{1}$: $[[[x_1,x_2],x_3],x_4] = + [x_4,[x_3,[x_2,x_1]]]$

$\boxed{2}$: $[[[x_2,x_1],x_4],x_3] = [x_3,[x_4,[x_2,x_1]]]$

$\boxed{3}$ $[[[x_3,x_4],x_1],x_2] = [x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]$

$\boxed{4}$ $[[[x_4,x_3],x_2],x_1] = [x_1,[x_2,[x_4,x_3]]]$

$$\Rightarrow \underbrace{[x_4,[x_3,[x_2,x_1]]]}_{\boxed{5}} + \underbrace{[x_3,[x_4,[x_2,x_1]]]}_{\boxed{6}}$$

$$+ \underbrace{[x_2,[x_1,[x_3,x_4]]]}_{\boxed{6}} + [x_1,[x_2,[x_4,x_3]]] = 0 \quad \text{?} \quad \bigstar$$

$\boxed{5}$: $[x_4,[x_3,[x_4,x_2]]] + [x_3,[[x_1,x_2],x_4]]$

$+ [[x_1,x_2],[x_4,x_3]] = 0$

$\boxed{5}$: $\Rightarrow [x_4,[x_3,[x_1,x_2]]] = -[x_3,[[x_1,x_2],x_4]]$

$- [[x_1, x_2], [x_4, x_3]]$

$\boxed{6}\ [x_2, [x_1, [x_3, x_4]]] + [x_4, [[x_3, x_4], x_2]]$

$+ [[x_3, x_4], [x_2, x_1]] = 0$

$\Rightarrow \boxed{6}\ [x_2, [x_1, [x_3, x_4]]] = - [x_4, [[x_3, x_4], x_2]] - [[x_3, x_4], [x_2, x_1]]$

نعوض $\boxed{5}$ و $\boxed{6}$ في الطرف $\ast$

$[x_3, [x_4, [x_2, x_1]]] + [x_3, [x_4, [x_1, x_2]]] - [[x_1, x_2], [x_4, x_3]]$

$+ [x_1, [x_2, [x_4, x_3]]] + [x_2, [x_1, [x_3, x_4]]]$

$- [[x_3, x_4], [x_2, x_1]] = 0$

$\ast$ نظرية :

ليكن A مجموعة جزئية غير خالية من الجبر J ، R ، نعرف المجموعة A بأنها $Z(J)$

$$Z(J) = \{a; a \in A; [a, z] = 0\ \forall z \in J\}$$

نسمي A مركزية $Z(J)$ اذا كان $A \subset J$)

البرهان :

1) $Z(J) \neq \phi$ لأن

$0 \in A; [0, z] = 0\ \forall z \in J$

$\forall \alpha, \beta \in R;\ a, b \in Z(J)$

$\alpha a + \beta b \in Z(J)$ ؟؟

$\forall z \in J; [\alpha a + \beta b, z] = [\alpha a, z] + [\beta b, z]$

$\qquad = \alpha [a, z] + \beta [b, z] = 0$

$\Leftarrow$ $Z(J)$ حيث ، مشتقة في A

$$\forall a \in A , d_a(z(J)) \subset Z(J)$$

$$x \in d_a(z(J)) \quad , \quad x = d_a(y) , \quad y \in Z(J).$$

$$[x,z] = [d_a(y),z]$$

$$d_a[y,z] = [d_a(y),z] + [y,d_a(z)]$$

$$[d_a(y),z] = d_a[y,z] - [y,d_a(z)]$$

$\underset{\mathbb{II}}{\swarrow}$ $\quad\quad\quad \underset{\in J}{\underline{}}$

$$y \in Z(J) ; \quad [y,z]=0 \quad d_a([y,z])=0$$

$$d_a(z) \in J$$

$$[y, d_a(z)]=0$$

$$[x,z]=[d_a(y),z]=0$$

$$\forall a \in A , d_a(z(J)) \subseteq Z(J) \quad\quad\quad \Leftarrow$$

الجداء المباشر لجورلي

تعريف: ليكن A_1, A_2 فضائين شعاعيين على نفس الحقل K نعرف جداءهما $A_1 \times A_2$ كـ:

$$A_1 \times A_2 = \{(a,b) \; ; \; a \in A_1, b \in A_2\}$$

نشكل فضاء شعاعي على نفس الحقل K بالنسبة للعمليتين التاليتين: أي أنه $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$

$$a_1, b_1 \in A_1, \quad a_2, b_2 \in A_2$$

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$

- $\forall \lambda \in K \; ; \; \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$

- $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = ([a_1, b_1], [a_2, b_2])$

البرهان: بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب ببيان لعناصر من الحقل K تشكل مجموعة على K فإن $A_1 \times A_2$ نشكل فضاء شعاعي:

1) $[(a_1, a_2), (a_1, a_2)] = ([a_1, a_1], [a_2, a_2])$

$$= (0, 0)$$

2) $[(a_1, a_2) + (b_1, b_2), (c_1, c_2)] = [(a_1+b_1, a_2+b_2), (c_1, c_2)]$

$$= ([a_1+b_1, c_1], [a_2+b_2, c_2]) = ([a_1, c_1] + [b_1, c_1], [a_2, c_2] + [b_2, c_2])$$

$$= ([a_1, c_1], [a_2, c_2]) + ([b_1, c_1], [b_2, c_2])$$

$$= \left[(a_1, a_2), (c_1, c_2)\right] + \left[(b_1, b_2), (c_1, c_2)\right]$$

نقول مقابل تعريف ضرب خارجي لاحقا نعرف القانون الخارجي

على الجمع

$$\forall \alpha \in M \qquad (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$$
$$\alpha [*x, y] = *[\alpha x, y] = [*, \alpha y]$$

$$\alpha \left[(a_1, a_2), (b_1, b_2)\right] = \alpha \left([a_1, b_1], [a_2, b_2]\right)$$
$$= \left(\alpha [a_1, b_1], \alpha [a_2, b_2]\right) = \left([\alpha a_1, b_1], [\alpha a_2, b_2]\right)$$
$$= \left[[\alpha a_1, \alpha a_2], (b_1, b_2)\right] = \left[\alpha (a_1, a_2), (b_1, b_1)\right]$$

لنكن $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A_1 \times A_2$

$$\left[(a_1, a_2), \underset{①}{\left[(b_1, b_2), (c_1, c_2)\right]}\right] + \left[(b_1, b_2), \underset{②}{\left[(c_1, c_2), (a_1, a_2)\right]}\right]$$

$$+ \left[(c_1, c_2), \underset{③}{\left[(a_1, a_2), (b_1, b_2)\right]}\right] = 0 \qquad \textcolor{red}{??}$$

$$\textcolor{red}{①} \left[(a_1, a_2), \left([b_1, c_1], [b_2, c_2]\right)\right] = \left([a_1, [b_1, c_1]], [a_2, [b_2, c_2]]\right)$$

$$\textcolor{red}{②} \left[(b_1, b_2), \left[(c_1, c_2), (a_1, a_2)\right]\right] = \left[(b_1, b_2), \left([c_1, a_1], [c_2, a_2]\right)\right]$$

$$= \left([b_1, [c_1, a_1]], [b_2, [c_2, a_2]]\right)$$

$$\textcolor{red}{③} \left[(c_1, c_2), \left([a_1, b_1], [a_2, b_2]\right)\right] = \left([c_1, [a_1, b_1]], [c_2, [a_2, b_2]]\right)$$

نعوض في العلاقات